Wykład 4

24 X 2022

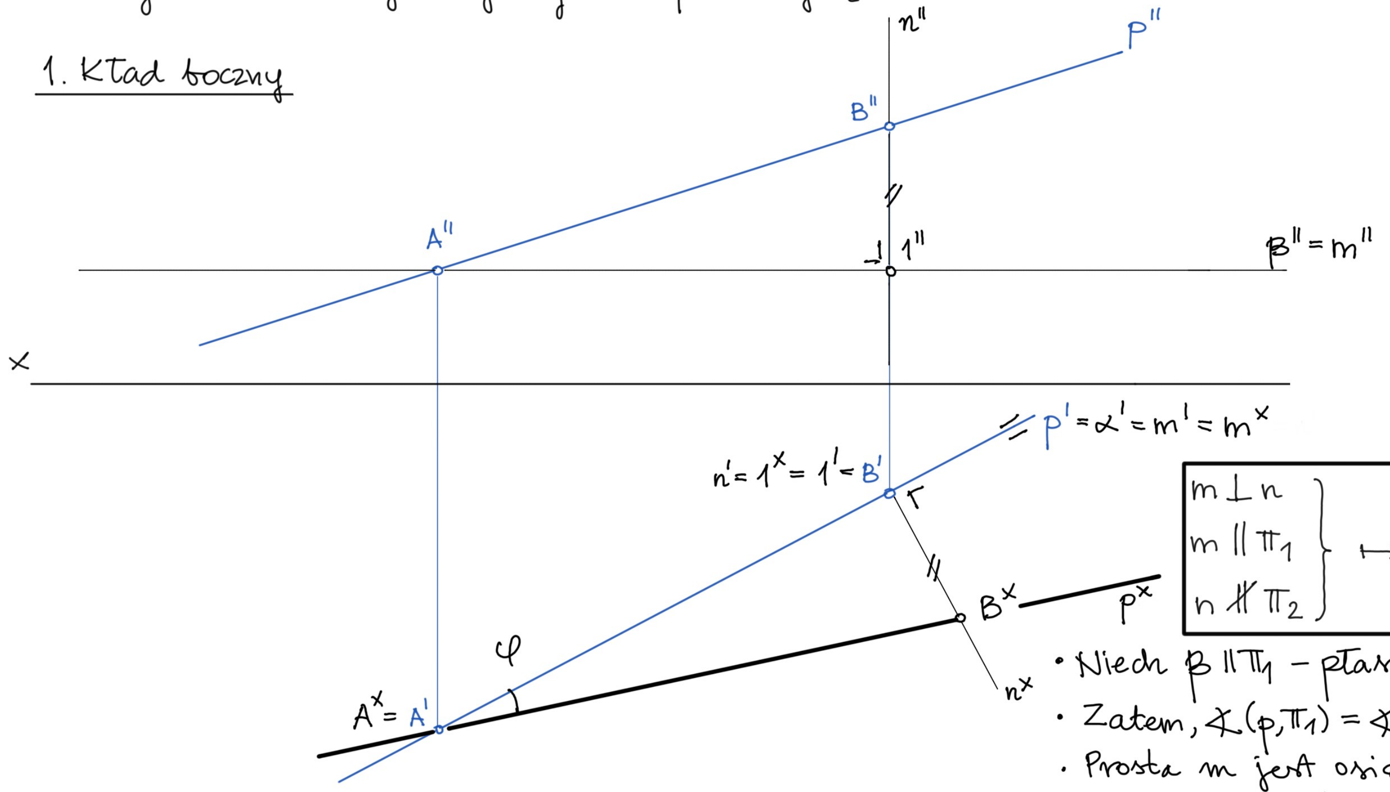
KŁAD

– obrót względem prostej równoległej do rzutni na płaszczyznę równoległą do rzutni

$\boxed{\text{Zastosowanie kładu – konstrukcje miarowe (mierzenie odległości i kątów)}}$

Zwykle kład wykonujemy na płaszczyznę $\parallel \Pi_1$.

1. Kład boczny



DANE:

$p(A,B)$ – prosta w położeniu ogólnym

POLECENIE:

Znaleźć kąt $\varphi = \sphericalangle(p, \Pi_1)$.

Znaleźć odległość $d = |AB|$.

ROZWIĄZANIE:

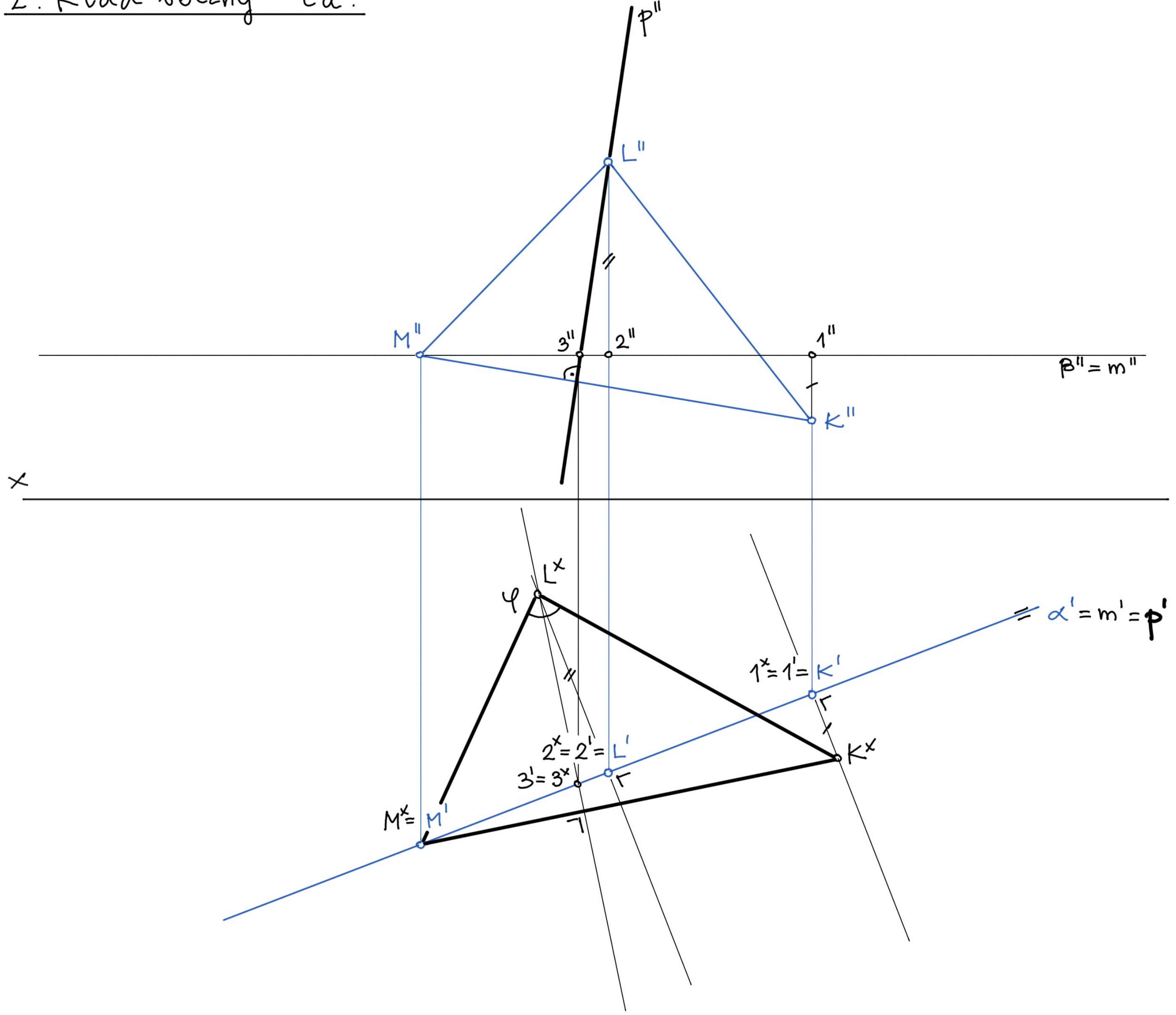
- Korzystamy z faktu (niezmiennika N7):

$$\left.\begin{array}{l} m \perp n \\ m \parallel \Pi_1 \\ n \nparallel \Pi_2 \end{array}\right\} \mapsto m' \perp n' ; \quad \left.\begin{array}{l} m \perp n \\ m \parallel \Pi_2 \\ n \nparallel \Pi_1 \end{array}\right\} \mapsto m'' \perp n''$$

- Niech $\beta \parallel \Pi_1$ – płaszczyzna kładu, $A = p \cap \beta$.
- Zatem, $\sphericalangle(p,\Pi_1) = \sphericalangle(p,\beta) \overset{df}{=} \sphericalangle(p,m)$, $m = \alpha \cap \beta$, $\alpha \perp \beta$.
- Prosta m jest osią obrotu α wzgl. β.
- Niech $1 \ni m$ i taki, że $B1 \perp m$. Wtedy $B1 \parallel \Pi_2$, $n(B,1) \parallel \Pi_2$, $n'' \perp m''$.
- Zatem, $|B1| = |B''1''| \to$ wyznaczamy B^x z warunku $|B''1''| = |B^x 1^x|$.
- Ostatecznie: $\varphi = \sphericalangle(p^x, m^x)$, $d = |A^x B^x|$.

? $\boxed{\text{Znaleźć } \psi = \sphericalangle(p, \Pi_2)}$

2. Kład boczny – cd.



DANE:

$\alpha(K, L, M) \perp \pi_1$

POLECENIE:

Znaleźć $\varphi = \sphericalangle(KL, LM)$.

Znaleźć $p \perp q(K,M)$, $L \in p$

ROZWIĄZANIE:

- Korzystamy z $N7^{\perp}$.
- $\beta \parallel \pi_1$, $m = \alpha \cap \beta$, $M \in m$
- m – oś obrotu α
- $\{1,2\} \in m \rightarrow \{K1, L2\} \perp m$
- $K1 \parallel \pi_2 \rightarrow |K1| = |K''1''| = |K^x 1^x|$

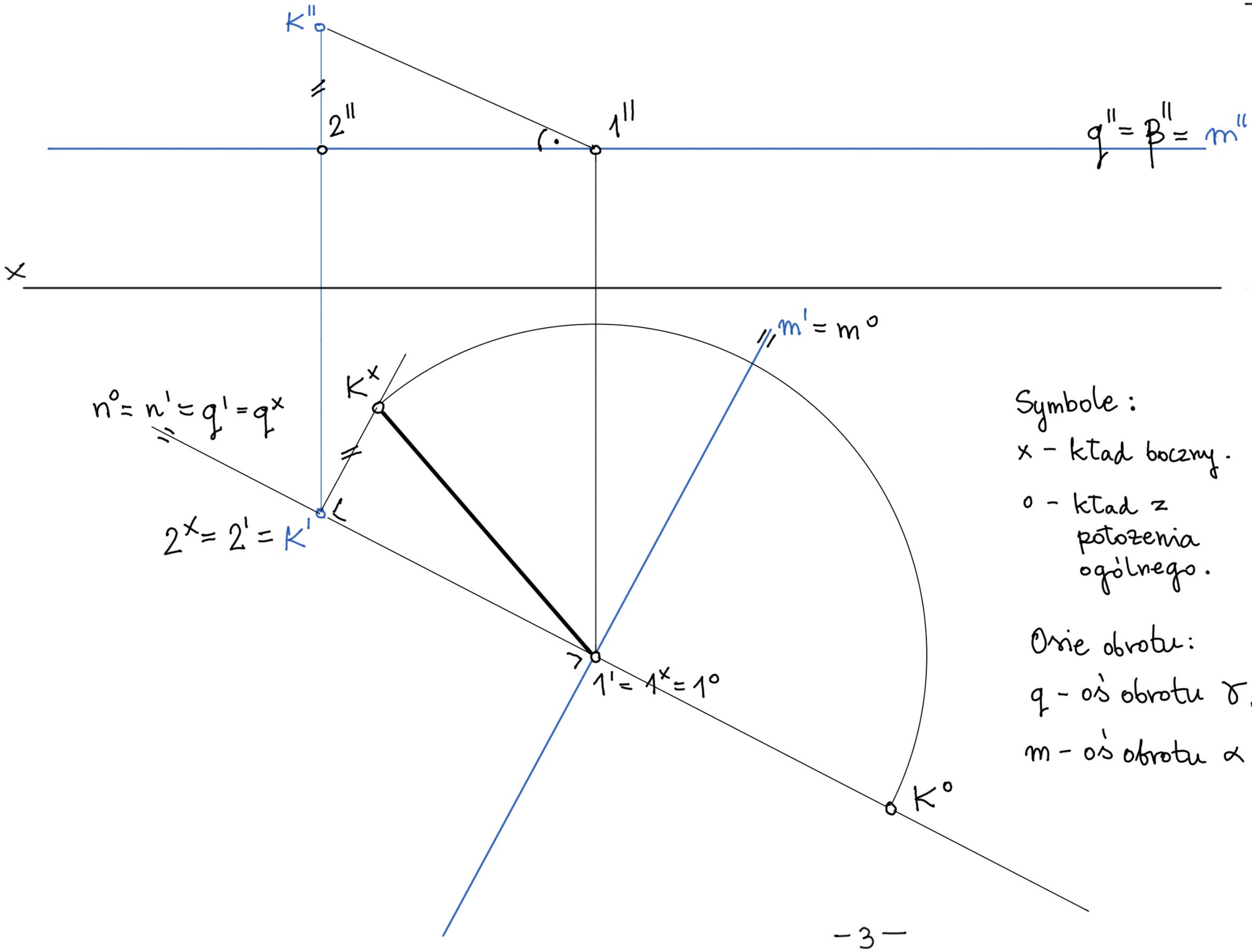
  $L2 \parallel \pi_2 \rightarrow |L2| = |L''2''| = |L^x 2^x|$
- $\varphi = \sphericalangle(K^x L^x, L^x M^x)$
- $p^x \perp K^x M^x$, $p(3, L)$

  $3 \in m \rightarrow 3^x = 3'$

? Rozwiązać zadanie podobne, przyjmując $\Delta \in \beta \perp \pi_2$

3. Kład z położenia ogólnego

UWAGA:
W tym zadaniu kład boczny jest konstrukcją pomocniczą.



Symbole:
x – kład boczny.
o – kład z położenia ogólnego.

Osie obrotu:
q – oś obrotu γ.
m – oś obrotu α.

DANE:
$\alpha(m, K)$, $K \not\in m$, $m \parallel \pi_1$

POLECENIE:
Znaleźć $d = |mK|$.
Wykonać kład α.

ROZWIĄZANIE:
- Korzystamy z $N_7^{\perp}$.
- $\beta \ni m$
- $n(1, K) \perp m$, $1 = n \cap m$
- $d' = |1'K'|$, $d'' = |1''K''|$, $d' \neq d'' \neq d$!!
- γ – płaszczyzna pomocnicza $\gamma \perp \beta$, $\gamma(1, K, 2)$, gdzie $K2 \perp \beta$ oraz $2 \in \beta$.
- Zatem $K2 \parallel \pi_2$ oraz $|K2| = |K''2''|$
- Ponadto, $q(1,2) = \gamma \cap \beta$ oraz $n(K,1) = \gamma \cap \alpha$, $\{q, n\} \perp m$.
- Kład boczny γ – obrót γ wzgl. q – pozwala określić $d = |1^x K^x|$.
- Kład d na β sprowadza się do znalezienia odcinka $1°K° \in n°$.

? $\boxed{\text{Rozważyć przypadek } \alpha(K, L, M)}$

Zagadnienie jednoznaczności odwzorowania Monge'a

? A. Bieliński (2015)
rozdz. 1.2.2, 1.2.3
rozdz. 3

Fakt:

Każdemu punktowi $P \in E^3$ można jednoznacznie przyporządkować parę (P', P'').

$$P \mapsto (P', P'')$$

Każdej parze (P', P'') można jednoznacznie przyporządkować punkt $P \in E^3$.

$$(P', P'') \mapsto P$$

Zatem $P \longleftrightarrow (P', P'')$.

Uwaga 1:

Punkty P' i P'' tworzą parę (P', P'') jeżeli są połączone prostą odnoszącą.

Uwaga 2:

Stwierdzenie $m \mapsto (m', m'')$, dotyczące prostych, jest prawdziwe,

ale $(m', m'') \mapsto m$ nie zawsze! – por. rozdz. 3.1.3 w A. Bieliński (2015).

Wniosek:

Jednoznaczne odwzorowanie OBIEKT $\longleftrightarrow$ RZUTY OBIEKTU uzyskamy zawsze za pomocą punktów określających ten OBIEKT.

Np. $m(P, Q) \longleftrightarrow (m'(P', Q'), m''(P'', Q''))$, jeżeli $P \neq Q$.

$\alpha(P, Q, R) \longleftrightarrow (\alpha'(P', Q', R'), \alpha''(P'', Q'', R''))$, jeżeli P, Q, R – niewspółliniowe.