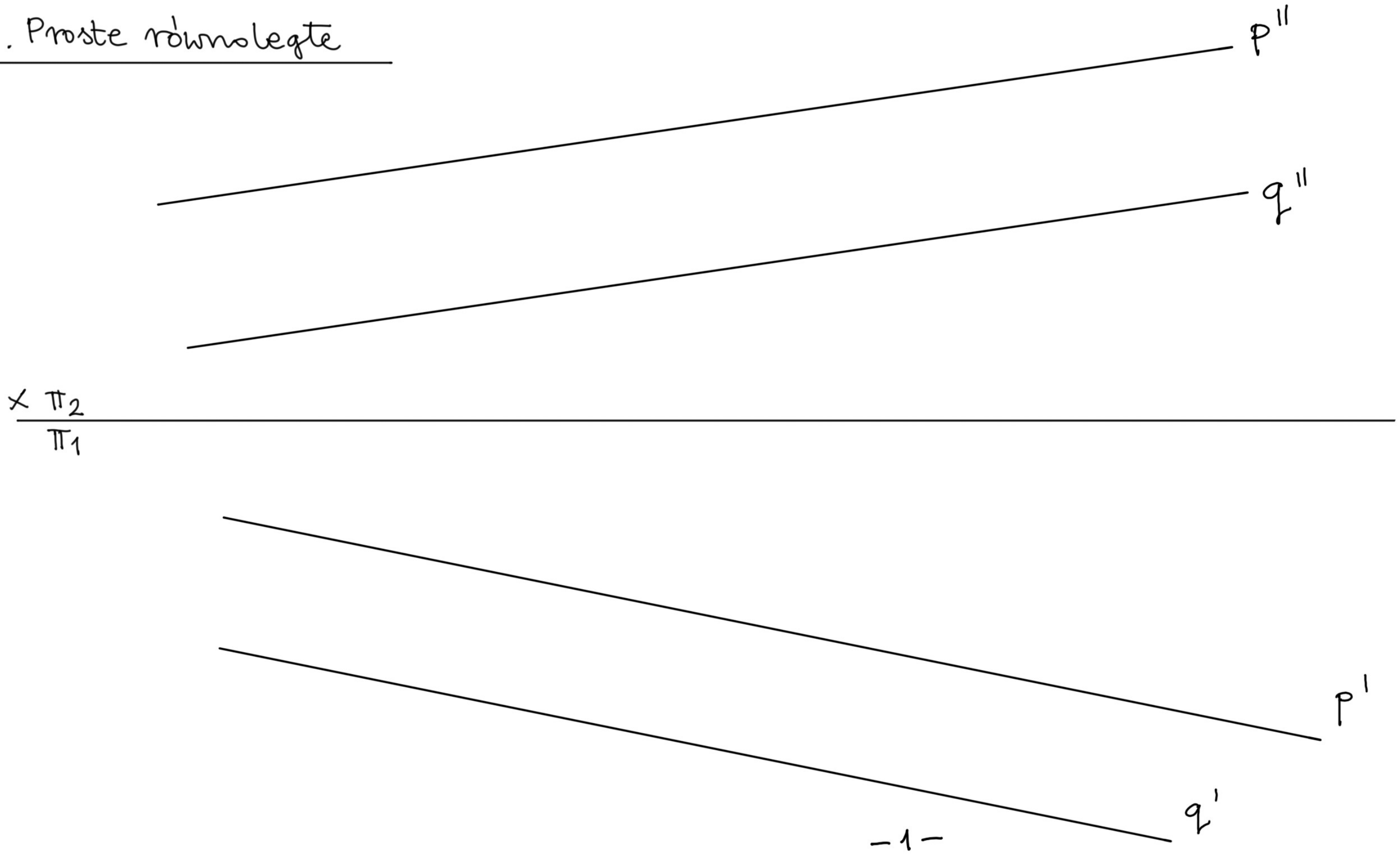
- proste równoległe
- proste prostopadłe
- płaszczyzny definiowane za pomocą dwu prostych
- przynależność punktu (prostej) do płaszczyzny
- prosta (płaszczyzna) równoległa do danej płaszczyzny
- przebicie prostą dowolnej płaszczyzny
- linia przecięcia dwu płaszczyzn

Wykład 3
17 X 2022

Zadania do samodzielnego rozwiązania oznaczam "¿"

1. Proste równoległe



$p \parallel q$, $p \neq q$

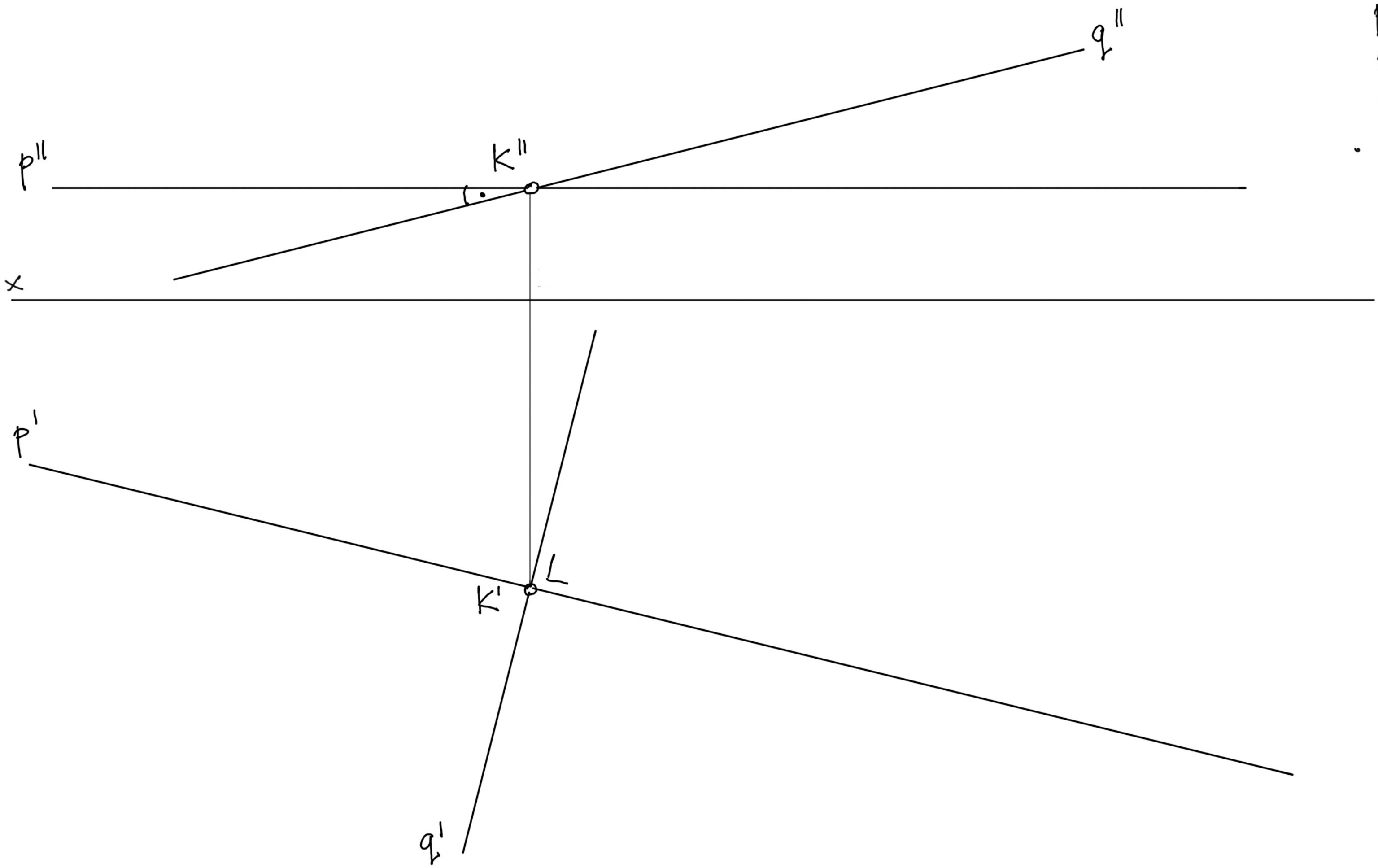
$$p \parallel q \longmapsto \begin{cases} p' \parallel q' \\ p'' \parallel q'' \end{cases}$$

- Symbol " $\longmapsto$ " oznacza przyporządkowanie.
- Czyli mówimy, że prostym p, q, które są równoległe w przestrzeni, są przyporządkowane dwie pary rzutów: (p', q'), $p' \parallel q'$ oraz (p'', q''), $p'' \parallel q''$

2. Proste prostopadłe

$$p \perp q \not\mapsto \begin{cases} p' \perp q' \\ p'' \perp q'' \end{cases}$$

- Symbol " $\not\mapsto$ " oznacza, że przyporządkowanie w ogólności nie zachodzi.
- Może jednak zachodzić w pewnych przypadkach szczególnych.



Przypadek szczególny:

$p \parallel \pi_1$

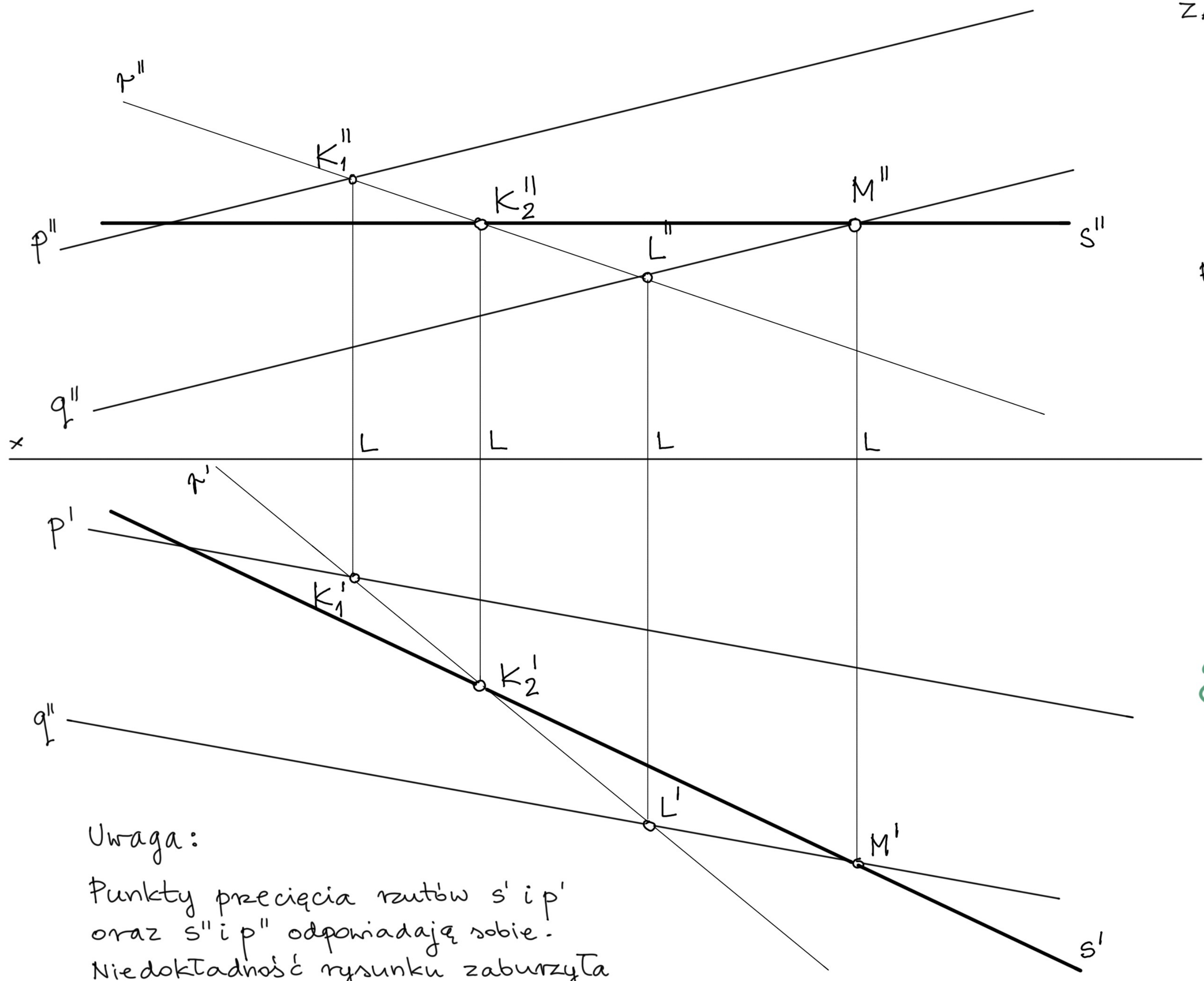
$p \perp q \Rightarrow p' \perp q'$

$K = p \cap q$

$\boxed{p \parallel \pi_2}$?

3. Płaszczyzny definiowane za pomocą dwu prostych.

4. Przynależność do płaszczyzny.



DANE: $\alpha(p,q)$, $p \parallel q$, $p \neq q$

ZADANIE:

Znaleźć
- $K \in \alpha$.
- $r \in \alpha$.
- $s \in \alpha$, $s \parallel \pi_1$.
- $t \perp s$.

?

ROZWIĄZANIE:

$K_1 \in p \in \alpha$ – trywialne

$K_2 \in r \in \alpha$

$r(K_1, L)$, $L \in q$ – ogólne

$s(K_2, M)$, $M \in q$

?

Niech $\alpha(p,q)$, gdzie

p,q – dowolne, ale

$K = p \cap q$.

Narysuj prostą $t(K,M)$,

gdzie $M \in \alpha$.

Uwaga:

Punkty przecięcia rzutów s' i p' oraz s'' i p'' odpowiadają sobie. Niedokładność rysunku zaburzyła tę odpowiedniość.

5. Prosta (płaszczyzna) równoległa do danej płaszczyzny

DANE: $\alpha(p,q)$, $p \parallel q$, $p \neq q$ oraz $K \notin \alpha$.

POLECENIE:

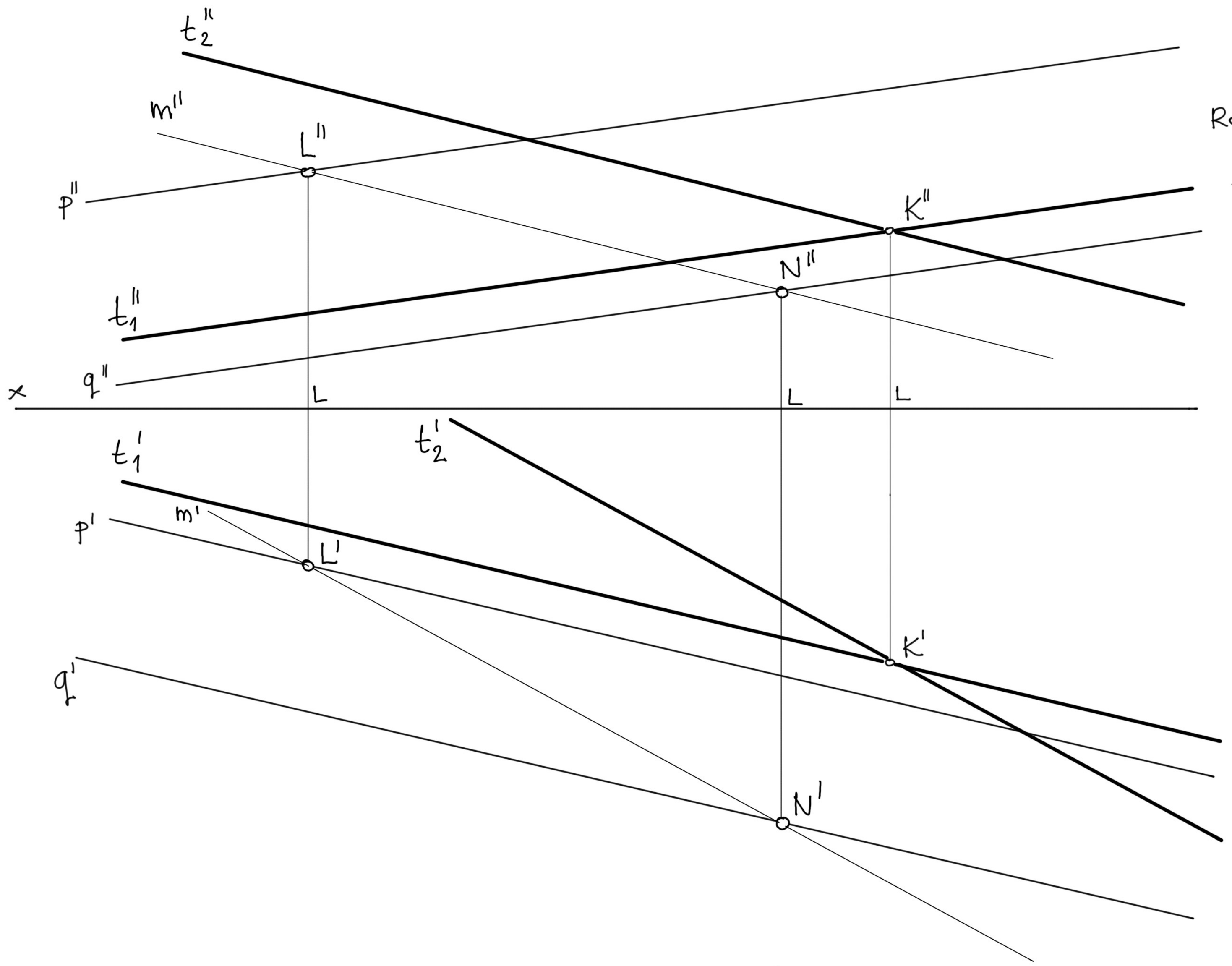
Narysuj $t \parallel \alpha$ oraz $\beta \parallel \alpha$ przez K.

ROZWIĄZANIE:

$$t_1 \parallel \alpha \mapsto \begin{cases} t_1' \parallel \{p', q'\} \\ t_1'' \parallel \{p'', q''\} \end{cases}$$

$$t_2 \parallel \alpha \mapsto t_2 \parallel m \subset \alpha$$

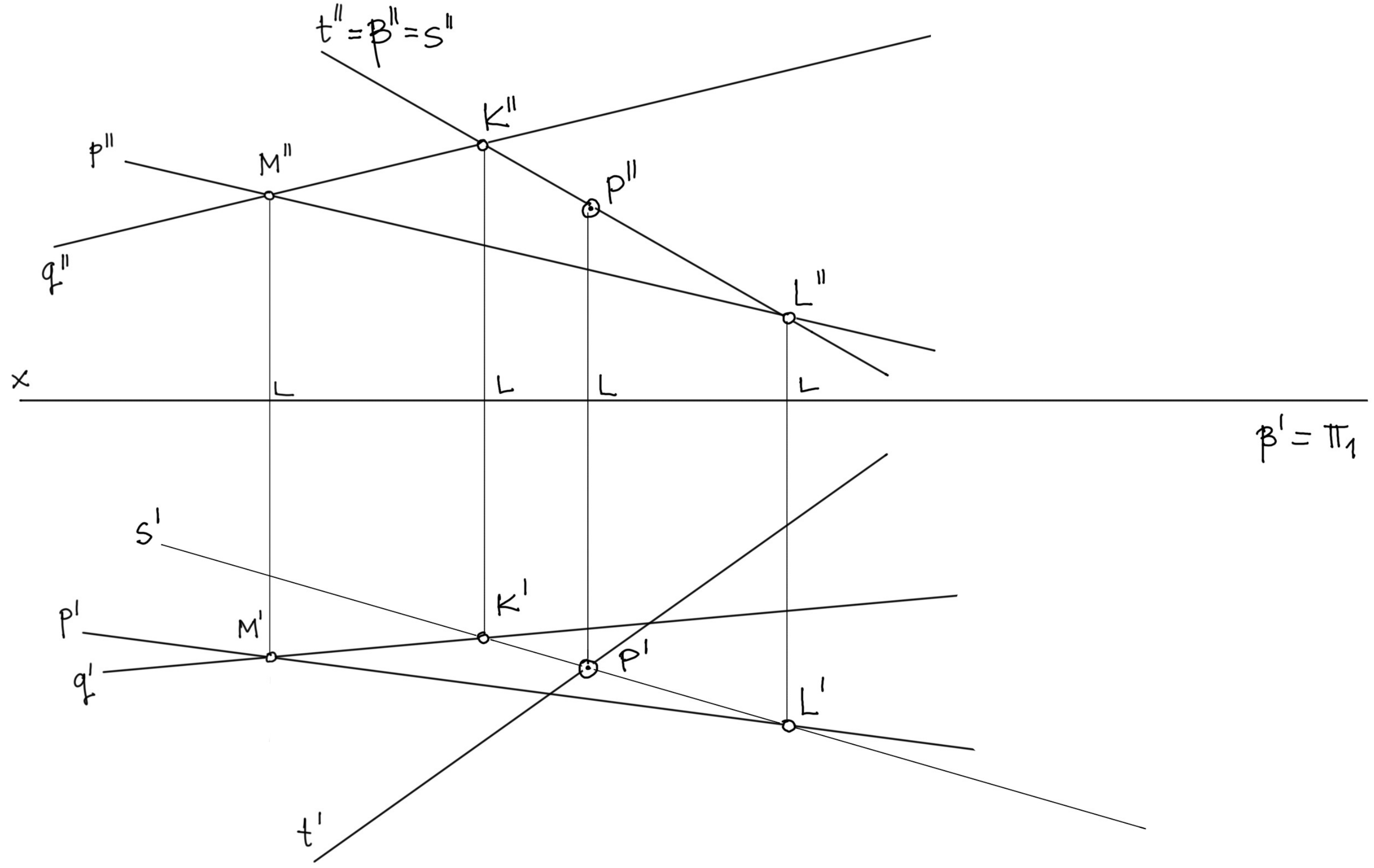
$$\beta(t_1, t_2) \parallel \alpha$$



?

Niech $\alpha(p,q)$, gdzie p,q – przecinają się, $K = p \cap q$. Ponadto, $L \notin \alpha$.
Znajdź M, N takie, że $\beta(L,M,N) \parallel \alpha$.

6. Przebicie prostą płaszczyzny w dowolnym położeniu.



DANE: $\alpha(p,q)$ oraz

$t \notin \alpha$, $t \nparallel \alpha$

POLECENIE:

Znajdź $P = t \cap \alpha$.

ROZWIĄZANIE:

- Niech $\beta \perp \pi_2$, $t \in \beta$
- Wyznaczamy

  $L = p \cap \beta$

  $K = q \cap \beta$

  $s(K, L)$
- Zauważamy, że

  $s \in \alpha$

  $s \in \beta$

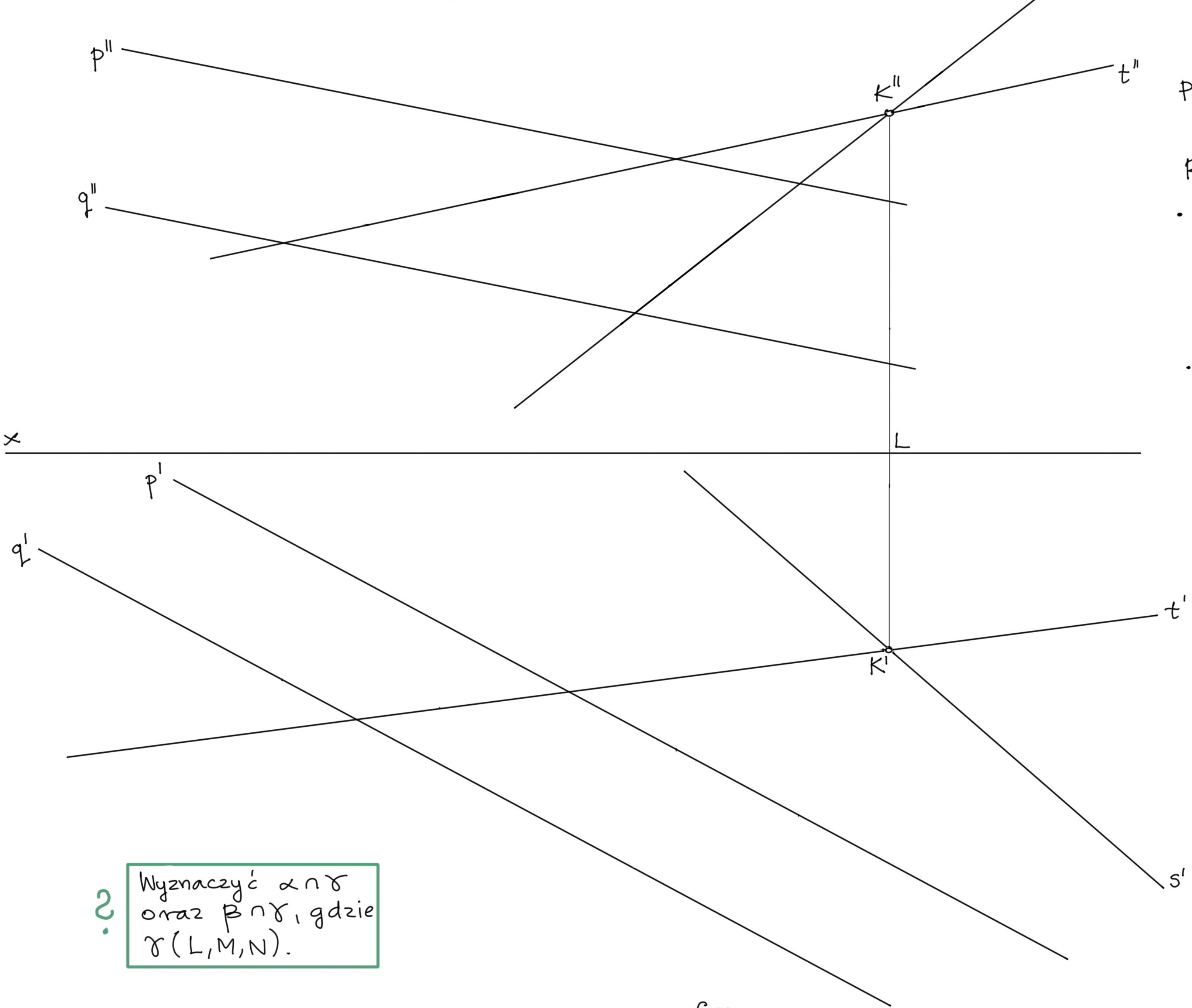
  $s = \alpha \cap \beta$
- Wyznaczamy

  $P = s \cap t$

? $\boxed{\beta \perp \pi_1}$

? Jak wyżej, ale $\alpha(p,q)$, gdzie $p \parallel q$.

7. Linia przecięcia dwu płaszczyzn



? Wyznaczyć $\alpha \cap \gamma$ oraz $\beta \cap \gamma$, gdzie $\gamma(L, M, N)$.

DANE:

$\alpha(p, q)$, $p \parallel q$, $p \neq q$

$\beta(s, t)$, $K = s \cap t$

POLECENIE:

Wyznaczyć $r = \alpha \cap \beta$.

ROZWIĄZANIE:

- Niech $\{\delta, \varepsilon\} \perp \Pi_2$ oznaczają płaszczyzny pomocnicze takie, że $s \in \delta$, $t \in \varepsilon$.
- Wyznaczamy $P_1 = p \cap \delta$, $P_2 = p \cap \varepsilon$, $Q_1 = q \cap \delta$, $Q_2 = q \cap \varepsilon$
- Zauważamy, że $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\} \in \alpha$ oraz wyznaczamy $m_1(P_1, Q_1) = \alpha \cap \delta$, $m_2(P_2, Q_2) = \alpha \cap \varepsilon$
- Wyznaczamy $R_1 = m_1 \cap s$ i zauważamy, że $R_1 \in m_1 \in \alpha$, $R_1 \in s \in \beta$
- Podobnie, $R_2 = m_2 \cap t$, $R_2 \in m_2 \in \alpha$, $R_2 \in t \in \beta$
- Wyznaczamy $r(R_1, R_2)$